Ensembles de Lattès-Julia

Samuel Monnier*

Qui suis-je ? Après une thèse à la Section de Mathématique de l'Université de Genève et une carrière académique d'une dizaine d'années dans le domaine de la théorie des cordes, je travaille maintenant dans l'industrie chez G-Research, une entreprise utilisant des techniques de pointe en statistiques et machine learning pour prédire les marchés financiers.

Contexte de l'algorithme utilisé. Les deux images présentées sont construites au moyen d'applications conformes de la sphère vers elle-même. Par *application*, on entend une façon de coller une sphère sur une autre, en la supposant faite d'un matériau infiniment extensible mais impossible à déchirer (continuité). Une application est dite *conforme* si elle déforme l'environnement immédiat de chaque point au moyen d'une rotation et d'une dilatation/contraction, sans l'étirer dans une direction privilégiée. Etant donné un point de la sphère, on peut y faire agir l'application pour obtenir un nouveau point. En itérant ce processus, on obtient une séquence de points sur la sphère. On peut alors colorier chaque point de la sphère suivant certaines caractéristiques de son orbite, par exemple la distance moyenne des points de l'orbite au pôle nord de la sphère. Pour certaines applications conformes bien choisies, on obtient des images telles que celles présentées ici (qui représentent des portions de sphères).

Il est intéressant d'observer le comportement des orbites des points dans un petit voisinage d'un point donné. Pour certain points, les orbites du voisinage restent proches les unes des autres. Pour d'autres, elles divergent après un nombre suffisant d'itérations : elles sont dites *chaotiques*. L'ensemble des points ayant des orbites chaotiques est l'*ensemble de Julia* de l'application. Les applications conformes représentées ici ont la particularité d'avoir un ensemble de Julia dense, ce qui veut dire essentiellement que tous les points ont des orbites chaotiques.

Les structures fractales et autosimilaires que l'on peut observer sur ces images sont la conséquence directe du fait que l'application sous-jacente est conforme, et donc que l'environnement immédiat de chaque point n'est pas étiré. Une application non-conforme produirait des structures tellement

*samuel.monnier@gmail.com

étirées qu'elles en deviendraient méconnaissables. Le fait que l'application ait un ensemble de Julia dense se traduit par le fait que des structure fractales apparaissent partout sur l'image: aucune région de l'image n'est coloriée uniformément.

Mais à quoi ça sert ? La géométrie conforme est la branche des mathématiques qui étudie des espaces dans lesquels on ne peut pas nécessairement mesurer de distances, mais dans lesquels on peut en tous cas mesurer les angles. Elle a de nombreuses applications en mathématiques, et peut-être de manière plus surprenante en physique. Certains systèmes physiques, pour certaines valeurs dites "critiques" de leur paramètres (par exemple la température), exhibent le même type d'invariance d'échelle et d'autosimilarité qui peut être observé sur ces images. Ils sont décrits par des théories physiques incluant les transformation conformes parmi leur symétries. Ces théories conformes sont également au coeur de la recherche moderne en théorie des cordes et en gravité quantique.

Je veux plus de détails ! Nous n'avons pas encore précisé le type d'applications conformes utilisées pour créer ces images. Il s'agit d'applications de Lattès, qui sont construites comme suit. Considérons un tore à 2 dimensions (la forme d'un doughnut, ou d'une chambre à air de vélo). Le tore admet des applications conformes très simples, qui sont simplement des rotations (par exemple la rotation de la chambre à air due à la rotation de la roue du vélo). L'existence de certaines applications conformes du tore vers la sphère (appelées revêtements ramifiés) permet de transférer ces applications conformes simples du tore en applications conformes de la sphère. Ce sont les applications de Lattès, décrites par le mathématicien français Samuel Lattès en 1918.

Pour plus de détails:

- Un article de blog expliquant plus en détail la construction des applications de Lattès: http://www.algw.net/blog/blog.php?Post=20130428
- Un excellent article de John Milnor sur les applications de Lattès: https://arxiv.org/abs/math/0402147.
- Pour d'autres images du même type, visitez http://www.algw.net