Chord diagrams with 5 chords.

Jan Pulmann, University of Geneva

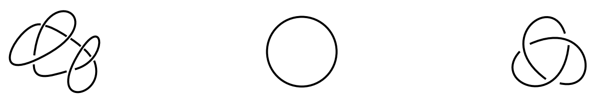
Qui suis-je ? Doctorant à l'université de Genève, l'image que vous voyez est un produit de mon projet de thèse dans le domaine de la physique mathématique. L'un des grands problèmes dans ce domaine est l'extension des systèmes classiques à leur version quantique, et ces diagrammes de cordes jouent un rôle important dans certaines variantes de ce problème.

Contexte de l'algorithme utilisé. Les diagrammes visibles sur l'image s'appellent des diagrammes de cordes sur un cercle. Les cordes sont représentées par les lignes en pointillés reliant deux points sur le cercle. L'image représente tous [1] les diagrammes de cordes à 5 cordes.

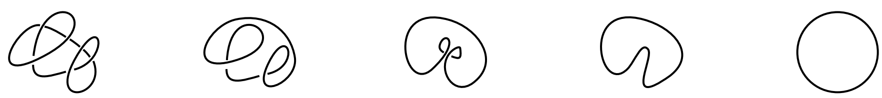
La fonction principale de mon algorithme est d'étudier les relations entre les diagrammes de cordes. Ces relations, issues de la théorie des nœuds, permettent d'exprimer l'ensemble de ces 372 diagrammes en termes de seulement 10 d'entre eux. Pour plus de détails, lisez la suite.

Mais à quoi ça sert ? Les diagrammes de cordes proviennent de la théorie des noeuds, un très beau sujet mathématiques. Parmi ses applications récentes, on trouve l'informatique quantique, l'ADN et d'autres objets pouvant s' « emmêler » .

La théorie des nœuds étudie les nœuds faits d'une seule corde dont les bouts sont reliés entre eux :



Immédiatement, vous voyez que le premier nœud peut être déformé en un second : les mathématiciens disent qu'il peut être "dénoué".

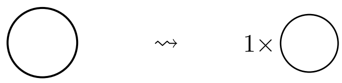


1. À des fins d'optimisation, certains des diagrammes de cordes possibles ne sont pas présents. Ceci est lié au fait que les cordes les plus courtes se trouvent toujours sur le côté droit du triangle.

Il est moins évident que le troisième nœud ne peut pas être dénoué. Pour distinguer les nœuds qui ne peuvent pas être déformés les uns par rapport aux autres, les mathématiciens ont trouvé de nombreux i*nvariants de nœuds*, applications qui prennent un nœud et vous rendent quelque chose (un nombre, un polynôme, une somme de diagrammes, ...). Ces machines doivent satisfaire une propriété importante : si nous déformons un nœud, le résultat produit par la machine ne change pas. Ainsi, si nous avons deux nœuds pour lesquels un invariant de nœud donne deux résultats différents, nous savons qu'ils ne peuvent être déformés l'un en l'autre. [2]

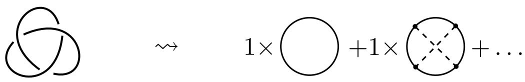
Un invariant de noeud important est l'*intégrale de Kontsevich*, qui nous ramène à nos diagrammes de cordes. L'intégrale de Kontsevich prend un nœud et vous rend une somme de diagrammes de cordes, chacun multiplié par un certain facteur.

Par exemple, pour le noeud trivial (un cercle), on obtient



c'est-à-dire simplement un diagramme de corde avec zéro cordes (avec un facteur 1).

Toutefois, pour le troisième nœud de notre liste, nous obtenons

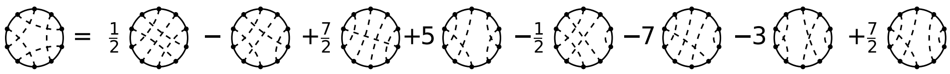


Parce que les résultats sont différents, nous savons maintenant que le dernier nœud ne peut pas être dénoué en le noeud trivial.

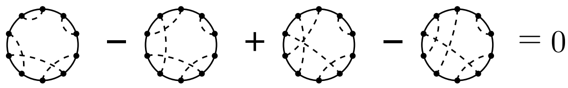
Je veux plus de détails ! L'*intégrale de Kontsevich* peut, en général, changer si nous déformons le nœud sous-jacent. Nous *définissons* donc les différents diagrammes de cordes correspondant au même nœud pour qu'ils soient égaux. Cela peut donner l'impression de tricher, mais heureusement, nous avons une méthode simple, appelée *4T relations*, pour nous dire quels diagrammes de cordes nous devons identifier.

Une conséquence simple de cette identification est que deux diagrammes de cordes sont égaux s'ils sont liés par une rotation. Cependant, nous avons aussi des identités plus compliquées, par exemple

2. Attention :, si le résultat est le même, on ne sait cependant pas si les nœuds sont liés par des déformations. Les invariants ayant cette propriété sont appelés *complets*. Il s'agit d'un problème difficile et non résolu de déterminer si l'intégrale de Kontsevich est un invariant complet.



Le but de mon algorithme est de trouver toutes ces identités. Les relations *4T* mentionnées ci-dessus donnent au total 3294 relations entre diagrammes de cordes de la forme



Après avoir simplifié ces 3924 équations pour les 372 diagrammes de cordes, nous obtenons finalement que seuls 10 des diagrammes de cordes sont indépendants : les 362 autres peuvent être exprimés à l'aide de ces dix. Plus abstraitement, nous disons que l'espace des diagrammes de cordes muni des relations 4T est de dimension 10.

Enfin, permettez-moi d'expliquer comment cela est lié à la quantification, mentionnée au début. Dans le problème de quantification que j'étudie, les *corrections quantiques* peuvent être exprimées à l'aide de ces diagrammes de cordes. Pour obtenir un système quantique cohérent, ces corrections ne peuvent pas être choisies arbitrairement, mais elles doivent remplir une condition appelée *associativité*. Il est toutefois possible de réécrire cette condition en termes de nœuds, dont l'intégrale de Kontsevich donne les diagrammes de cordes décrivant la quantification. Vérifier la condition d'associativité, qui est un système infini d'équations compliquées, se transforme ainsi en la vérification d'une simple équivalence de nœuds.

Pour plus d'informations, je vous recommande le livre "Introduction aux Invariants du nœud de Vassiliev". par Chmutov, Duzhin et Mostovoy, disponible à l'adresse suivante :

`https://arxiv.org/abs/1103.5628`