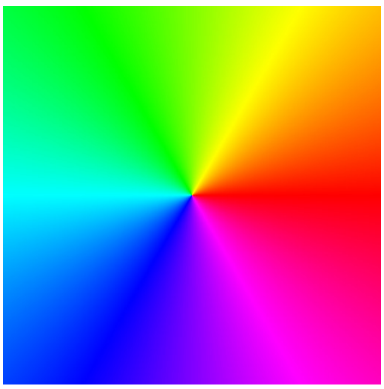
Fly me to Tan (moon) & Come wash with me

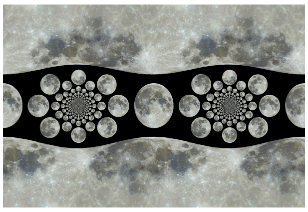
Felix Günther,

Qui suis-je ? Je suis un mathématicien qui étudie les discrétisations des théories géométriques classiques, y compris de l'analyse complexe. Dans ma thèse de doctorat, j'ai développé une théorie discrète de l'analyse complexe qui partage de nombreuses notions et théorèmes avec la théorie classique. Et même les preuves fonctionnent de manière presque analogue ! En 2017, la bourse PRIME de l'Office allemand d'échanges universitaires DAAD m'a permis de poursuivre mes recherches sur une théorie discrète des spineurs holomorphes à l'Université de Genève. En plus de mon travail de chercheur, je présente régulièrement les mathématiques et mes recherches à un large public.

Contexte de l'algorithme utilisé. La technique sous-jacente pour produire de telles images est appelée coloration de régions. La coloration de régionse est une méthode très populaire pour visualiser des fonctions complexes et pour représenter les quatre dimensions ! Normalement, un plan de points de couleurs arc-en-ciel et de luminosité différentes est choisi comme image de référence. La teinte indique l'angle et la luminosité la distance par rapport au centre.



Mais les mathématiques deviennent plus belles si on prend une photo de tous les jours et qu'on la poursuit périodiquement à la fois dans le sens horizontal et dans le sens vertical ! Cette grille d'images est alors identifiée au plan complexe. En donnant une fonction f, le point z sur le plan complexe est maintenant colorié par la couleur de $f(z)$ dans la grille. Par exemple, le centre de la lune est indiqué chaque fois que $tan(z)$ est égal à zéro (ou un autre point intégral de la grille qui est utilisé), donc chaque fois que z est égal à un multiple entier de π. Si on regarde l'image de gauche sur Come wash with me et la fonction $f(z) = z^3$, trois points qui se trouvent à la même distance du centre et qui forment un angle de 120 degrés entre eux ont la même couleur.



Si vous n'aimiez pas dessiner des courbes de fonctions réelles dans votre cours de mathématiques au lycée, vous pouvez maintenant aimer dessiner des courbes de fonctions complexes !

Mais à quoi ça sert ? Les fonctions holomorphes sont des applications du plan complexe dans lui-même qui préservent les angles. Cela semble plus compliqué que ça ne l'est : vous rencontrez probablement de telles fonctions chaque semaine. En fait, les services de cartographie web utilisent des fonctions holomorphes pour nous montrer où vous vous trouvez. Si l'on considère la Terre comme un plan complexe compactifiée (appelé sphère de Riemann), une carte n'est rien d'autre qu'une fonction de la sphère de Riemann dans le plan complexe. La raison historique pour laquelle les applications préservant les angles sont devenues si populaires est qu'elles étaient cruciales pour la navigation maritime. Il y a des centaines d'années, la seule façon de déterminer sa position en haute mer était de mesurer les angles et de les comparer avec sa carte.

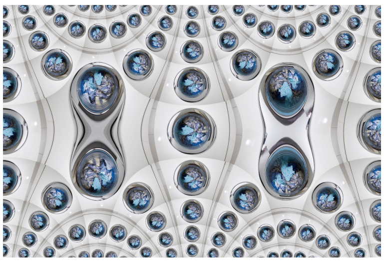
Je veux plus de détails ! Comme ces fonctions préservent les angles, elles préservent localement les formes. C'est pourquoi vous pouvez toujours reconnaître l'image originale de la lune sur laquelle la fonction tangente complexe est appliquée. Mais la distorsion vous donne une perspective nouvelle et fascinante de la lune et de l'infini du ciel ou de la machine à laver et son cycle d'essorage. À l'inverse, les images déformées vous donnent un meilleur aperçu du comportement mathématique de la fonction correspondante.

Fly me to tan(moon)

La fonction tangente est holomorphe, à l'exception de ses pôles où elle prend la valeur de l'infini. À gauche et à droite du centre, à $\pm\frac{\pi}{2}$, vous pouvez clairement repérer ces pôles : la lune y apparaît une infinité de fois. Vous observez également que la lune n'apparaît presque pas déformée au centre. Cela correspond au comportement asymptotique $\tan(z) \sim z$ près de zéro, une formule que vous avez peut-être retenue de votre cours de maths au lycée. Plus vous regardez en haut ou en bas de l'image, moins vous pouvez voir de variation. Cela correspond en fait à la propriété $\tan(x \pm i) \to \pm i$ si $y \to \infty$.

Come wash with me

L'image de gauche vous montre la fonction $f(z) = z^3$. Vous observez clairement sa triple symétrie. Elle conserve les formes du linge de lit presque partout ; mais à zéro, la taie d'oreiller bleu clair s'use. C'est ce qu'on appelle un point de ramification et il se produit toujours lorsque la dérivée de la fonction est égale à zéro, comme c'est le cas pour $f'(z) = 3z^2$. Comme le zéro est d'ordre 2, tout le linge se produit 2+1=3 fois autour du centre. Avez-vous déjà vécu la situation où vous avez obtenu plus de la machine à laver que vous n'en avez mis à l'intérieur ? Les mathématiques permettent de le faire ! L'image de droite vous montre la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ et une infinité de machines à laver près du centre. C'est parce que la fonction prend la valeur infinie en zéro, ce qu'on appelle un pôle de la fonction. La fonction est alors holomorphe en dehors de ce point. Mais quelle est la fonction représentée en bas? Regardez bien et devinez avant de poursuivre votre lecture !



Vous observez que la fonction est périodique dans le sens horizontal, disons 2 π-périodique. Vous voyez des points de ramification à gauche et à droite du centre à $\pm\frac{\pi}{2}$, donc la fonction représentée est égale à zéro à $\pm\frac{\pi}{2}$. Enfin, $f(z) \sim z$ près du centre. Savez-vous donc maintenant quelle fonction est appliquée à la machine à laver ? C'est la fonction sinus ! La fonction sinus est 2π-périodique, sa dérivée est la fonction cosinus qui est égale à zéro à $\pm\frac{\pi}{2}$, et vous vous souvenez peut-être de l'approximation $\sin(z) \sim z$ proche de zéro de votre cours de physique au lycée.