Agrégation limitée par la diffusion - Amanda Turner

Qui suis-je ? Amanda Turner est maître de conférences en mathématiques et statistiques à l'Université de Lancaster, au Royaume-Uni. Elle était professeure invitée à l'Université de Genève en 2018/20. Ses intérêts de recherche se situent à l'interface de la théorie des probabilités, de l'analyse complexe et de la physique mathématique. Elle s'intéresse particulièrement à la compréhension du comportement à long terme des processus de croissance planaires aléatoires qui surviennent dans des contextes physiques, tels que la croissance cellulaire et la création de polymères.

Mais à quoi ça sert ? Dans le monde physique, les amas à croissance aléatoire sont composés d'un grand nombre de particules, chacune étant petite comparée à la taille du cluster. Bien que le facteur aléatoire intervienne au niveau microscopique, à travers la manière dont s'attache successivement chacune des particules, on observe les amas au niveau macroscopique, niveau auquel les particules ne sont pas visibles. Les processus de croissance aléatoire sont totalement imprévisibles au niveau microscopique, mais les grands amas présentent souvent un comportement prévisible ou "universel". L'étude des modèles mathématiques a pour but d'extraire les principaux mécanismes qui sous-tendent ce comportement universel. Comme les modèles de croissance aléatoire peuvent être difficiles à analyser mathématiquement, des simulations numériques sont utilisées pour étudier certaines propriétés telles que le taux de croissance ou la dimension fractale de l'amas. Les simulations numériques permettent par exemple de prédire que l'agrégation limitée par la diffusion a une dimension fractale de 1,71.

En 1998, les physiciens Hastings et Levitov ont conçu une approche de modélisation de la croissance planaire dans laquelle ils ont représenté les amas de croissance comme des compositions de types spéciaux de fonctions, appelées applications conformes. Il s'agit de fonctions du plan complexe dans lui-même qui préservent localement les angles. Cette approche permet d'utiliser des techniques d'analyse complexe pour étudier la croissance aléatoire planaire.

Je veux plus de détails ! Dans la simulation, nous représentons chaque particule comme une petite fente (segment). Il est possible de donner explicitement une application conforme qui amène l'extérieur du disque unité $\{|z| > 1\}$ sur lui-même moins une fente de longueur d $\{|z| > 1\} \setminus (1, d]$. Cette application est utilisée comme représentation d'une particule de longueur d attachée au disque unitaire en position 1 (Figure 1). L'application peut être tournée pour représenter une fente attachée à la position $e^{i\theta}$ pour tout angle $\theta \in [0, 2\pi]$. Les simulations numériques construisent un groupe de la manière suivante : étape par

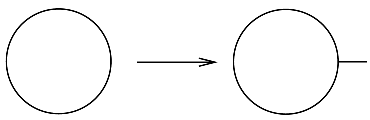

Figure 1: L'application conforme correspondant à une seule particule fendue attachée au point 1.

étape, elles génèrent une séquence d'angles $\Theta_1, \Theta_2, \dots \in [0, 2\pi]$ et de longueurs $d_1, d_2, \dots > 0$ selon une règle qui dépend du modèle physique précis qui doit être construit. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, désignons par F_n l'application conforme correspondant à une fente de longueur d_n attachée à l'angle Θ_n. Une séquence de bijections conformes $\Phi_n : \{|z| > 1\} \to \{|z| > 1\} \setminus K_n$ est construite en fixant $\Phi_0(z) = z$ et en définissant récursivement

$$\Phi_n(z) = \Phi_{n-1} \circ F_n(z) = F_1 \circ \cdots \circ F_n(z).$$

Notons que $K_0 = \{|z| \leq 1\}$ et $K_n = K_{n-1} \cup \Phi_{n-1}(e^{i\Theta_n}(1, 1 + d_n])$, donc la séquence $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ représente un amas en expansion où le disque unitaire K_0 est la particule de départ et au moment n la particule $P_n = \Phi_{n-1}(e^{i\Theta_n}(1, 1 + d_n])$ est ajoutée à l'amas (Figure 2). Un amas composé de n particules est alors donné par l'image du cercle $\{|z| = 1\}$ par l'application Φ_n.

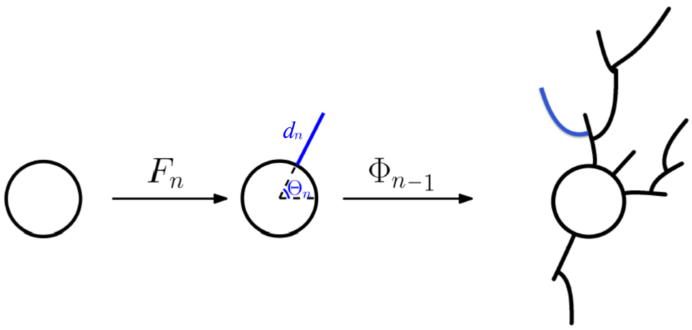

Figure 2: Diagramme illustrant la façon dont les amas en expansion peuvent être construits comme compositions d'applications conformes.